Этапы решения задачи о гравиквантовании

1. Электродинамика в неплоской метрике, т.е. в пространстве с (заданной, пока) гравитацией.

2. Гравитация, порождаемая электромагнитным полем, т.е. подстановка тензора энергии-импульса электромагнитного поля в уравнение Эйнштейна и нахождение его решения, т.е. скалярной кривизны $R(x^\mu)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$.

3. Подстановка 2. в 1., т.е. найденную кривизну, зависящую от времени, для электромагнитной волны $f(t)e^{\pm i\omega t}$, подставляем в лагранжиан п.1., причём эта кривизна выражена в переменных $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Из этих более полных уравнений Максвелла находим волновое уравнение и ищем его решение в виде $f(t)\,e^{\pm i\omega t}$, где $f(t)$ - медленная функция. Рецепт поиска решения таков: подставив $f(t)e^{\pm i\omega t}$ группируем члены так, чтобы выделить каноническое уравнение Гельмгольца (если это возможно) и эту часть приравниваем нулю, т.к. в правой части уравнения Гельмгольца стоит нуль. Оставшееся уравнение решаем и находим $f(t)$ и $\omega(t)$.

Примечание к пп. 2, 3: частота - функция времени.

4. Делается утверждение:

любой поток энергии в результате самодействия через гравитационное поле квантуется (квантует себя).

5. Вычисление фундаментальных констант:

$\hbar$, (e, $m_{\text{покоя}}$ для спинорных полей),

используя различные асимптотики решений более полных уравнений, определить $\exists$ или $\nexists$ $\omega_{\text{кр}}$.

6. Пристёжка спина.

Центрально-симметричное грав. поле.

С. Горбатенко М.В.

1. Распределение в-ва — центр.-симм.
2. Движение в-ва — центр. симм.

Воспользуемся „сферическими" пространственными координатами. Наиболее общим выражением для метрики является:

$$dS^2 = h(\vec{r},t)\,dr^2 + k(\vec{r},t)\left(\sin^2\theta\cdot d\varphi^2 + d\theta^2\right) + l(\vec{r},t)\,dt^2 + a(\vec{r},t)\,dr\,dt, \qquad (1)$$

где a, h, k, l — некоторые ф-ции.

В книге Чандрасекара доказывается, что можно преобразовать координаты $\vec{r}$ и t таким образом, что $a(\vec{r},t)=0$, при этом $k(\vec{r},t)=r^2$. Величины h и l запишем в виде $-e^{\lambda}$ и c^2e^{ν}.

$$ds^2 = e^{\nu}c^2dt^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) - e^{\lambda}dr^2 \qquad (2)$$

Отличные от нуля компоненты метрического тензора

$$g_{00} = e^{\nu},\quad g_{11} = -e^{\lambda},\quad g_{22} = -r^2,\quad g_{33} = -r^2\sin^2\theta;$$

$$g^{00} = e^{-\nu},\quad g^{11} = -e^{-\lambda},\quad g^{22} = -r^{-2},\quad g^{33} = -r^{-2}\sin^{-2}\theta;$$

Подразумевая в выражении $ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k$ под x^0, x^1, x^2, x^3 соответственно ct, r, θ, φ.

По формуле $\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right)$

вычислим символы Кристоффеля:

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2}; \quad \Gamma^0_{10} = \frac{\nu'}{2}; \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta;\\
&\Gamma^0_{11} = \frac{\dot\lambda}{2} e^{\lambda-\nu}; \quad \Gamma^1_{22} = -r e^{-\lambda}; \quad \Gamma^1_{00} = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda};\\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}; \quad \Gamma^3_{23} = \mathrm{ctg}\,\theta; \quad \Gamma^0_{00} = \frac{\dot\nu}{2};\\
&\Gamma^1_{10} = \frac{\dot\lambda}{2}; \quad \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta\cdot e^{-\lambda}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

15 компонент

По формуле $R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}$

вычислим компоненты тензора кривизны и подставим в уравнение Эйнштейна $R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T\right)$

получаем

$$\frac{8\pi k}{c^4} T^1_1 = -e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}, \qquad (4)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T^2_2 = \frac{8\pi k}{c^4} T^3_3 = -\frac{1}{2} e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2} e^{-\nu}\left(\ddot\lambda + \frac{\dot\lambda^2}{2} - \frac{\dot\lambda\dot\nu}{2}\right), \qquad (5)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T^0_0 = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}, \qquad (6)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T^1_0 = -e^{-\lambda}\frac{\dot\lambda}{r} \qquad (7)$$

Для случая $T^i_k = 0$:

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}=0 \qquad (8)$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=0 \qquad (9)$$

$$\dot{\lambda}=0 \qquad (10)$$

λ – не зависит от t.

(8)+(9): $\lambda'+\nu'=0$, т.е.

$$\lambda+\nu=f(t) \text{ – ф-ция только } t \qquad (11)$$

Но ds^2 в виде (2) даёт возм-ть сделать преоб-е:

$\nu+f(t)$ – произв. ф-ция t, $\Rightarrow$ $\lambda+\nu=0$.

Из (9):

$$e^{-\lambda}=e^{\nu}=1+\frac{const}{r} \qquad (12)$$

При $r\to\infty$ $e^{-\lambda}=e^{\nu}=1$, т.е. галилеева.

Const вычисляется из требования на больших r

$g_{00}=1+\frac{2\varphi}{c^2}$, где $\varphi=-\frac{km}{r}$ – ньютоновский, $\Rightarrow$

$$Const=-\frac{2km}{c^2}=r_g \text{ – гравит. радиус.} \qquad (13)$$

Таким образом:

$$ds^2=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2-r^2\left(\sin^2\theta\cdot d\varphi^2+d\theta^2\right)-\frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}} \qquad (14)$$

Получим ур-я У-сим. грав. поля в в-ве в сопутствующей системе отсчёта.

Запишем метрику в самом общем виде:

$$\underline{dS^2 = h\,dr^2 + k(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2) + l\,dt^2 + a\,dr\,dt},$$

Соп. сист. отсч. называется система с $\boxed{a=0}$ и радиальной составляющей скорости $=0$ (ост-е комп. и так $=0$).
Подвергнем коор-ты r и t доп-му преобр-ю $r = r(r')$, $t = t(t')$ и обозначим выбранные таким образом время и радиальную координату τ и R, а коэфф-ты h, k, l — соответственно: $-e^{\lambda}, -e^{\mu}, e^{\nu}$ (λ, μ, ν — ф-ции R и τ).
Тогда:

$$\underline{dS^2 = c^2 e^{\nu} d\tau^2 - e^{\lambda} dR^2 - e^{\mu}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)} \qquad (1)$$

В силу опр-я ССО тензор энергии-импульса имеет компоненты:

$$T_0^0 = \varepsilon\,,\quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -P$$

$$\Gamma^{i}_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^{l}} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{m}} \right)$$

$g_{im} \neq 0$

$g_{00} = e^{\nu}$, $g_{11} = -e^{\lambda}$, $g_{22} = -e^{\mu}$, $g_{33} = -e^{\mu} \sin^2 \Theta$

$g^{00} = e^{-\nu}$, $g^{11} = -e^{-\lambda}$, $g^{22} = -e^{-\mu}$, $g^{33} = -e^{-\mu} \sin^{-2} \Theta$

Одномерный нестационарный случай.

1. В нашем случае $\exists$ цилиндрическая симметрия, поэтому метрика должна оставаться неизменной при замене $y \to -y$, $z \to -z$.

В силу этого

$$g_{23} = 0$$

$$g_{02} = g_{03} = 0$$

$$g_{12} = g_{13} = 0$$

2. Интервал запишем в виде:

$$ds^2 = \alpha dt^2 + 2\beta\, dt\, dx + \gamma dx^2 + \omega (dy^2 + dz^2)$$

где $\begin{cases} \alpha = \alpha(t,x) \\ \beta = \beta(t,x) \\ \gamma = \gamma(t,x) \\ \omega = \omega(t,x) \end{cases}$, $\begin{cases} \alpha = g_{00} \\ \beta = g_{01} \\ \gamma = g_{11} \\ \omega = g_{22} = g_{33} \end{cases}$.

3. Вычислим символы Кристофеля. Для этого найдём g^{lm} – обратный к g_{lm}.

$$g_{lm} = \left[\begin{array}{cc|cc} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega \end{array}\right]$$

$g_{lm} g^{mk} = \delta_l^k$ – констатация обратности тензоров.

Ищем g^{ik} в виде:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} x & y & & \\ y & z & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & u & 0 \\ & & 0 & u \end{array}\right].$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & \beta & & \\ \beta & \gamma & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \omega & 0 \\ & & 0 & \omega \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} x & y & & \\ y & z & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & u & 0 \\ & & 0 & u \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ 0 & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Перемножаем матрицы

$$\left(\begin{array}{cc|cc} (\alpha x + \beta y) & (\alpha y + \beta z) & & \\ (\beta x + \gamma y) & (\beta y + \gamma z) & & \\ \hline & & \omega u & 0 \\ & & 0 & \omega u \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ 0 & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = 1 \\ \alpha y + \beta z = 0 \\ \beta x + \gamma y = 0 \\ \beta y + \gamma z = 1 \\ \omega u = 1 \end{cases}$$

Решив эту систему получим:

$$\boxed{x = \frac{\gamma}{\alpha\gamma - \beta^2}} \qquad \boxed{y = -\frac{\beta}{\alpha\gamma - \beta^2}}$$

$$\boxed{z = \frac{\alpha}{\alpha\gamma - \beta^2}} \qquad \boxed{u = \frac{1}{\omega}}$$

Таким образом

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \dfrac{\gamma}{\alpha\gamma-\beta^2} & -\dfrac{\beta}{\alpha\gamma-\beta^2} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ -\dfrac{\beta}{\alpha\gamma-\beta^2} & \dfrac{\alpha}{\alpha\gamma-\beta^2} & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & \dfrac{1}{\omega} & 0 \\ & & 0 & \dfrac{1}{\omega} \end{array}\right] = g^{em}.$$

В результате ненулевые символы Кристоффеля имеют вид:

Γ^0_{00}	. . .
Γ^0_{01}	
. . .	. . .
. . .	
	. . .
. . .	. . .
Γ^3_{13}	. . .

Вычислим теперь тензор Риччи:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\beta\alpha}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\sigma_{\sigma\nu}\Gamma^\nu_{\beta\alpha} - \Gamma^\sigma_{\beta\nu}\Gamma^\nu_{\sigma\alpha}.$$

Ненулевые компоненты тензора Риччи имеют вид:

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma^1_{00}}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma^1_{01}}{\partial t} - 2\,\frac{\Gamma^2_{02}}{\partial t} +$$

$$+ \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{00} + 2\Gamma^2_{02}\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{00} + 2\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{00} -$$

$$- \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{00} - \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{01} - 2\Gamma^2_{02}\Gamma^2_{02}.$$

$$R_{01} = \frac{\partial \Gamma^0_{01}}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma^0_{00}}{\partial x} - 2\,\frac{\partial \Gamma^2_{02}}{\partial x} +$$

$$+ 2\Gamma^2_{02}\Gamma^0_{01} + \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{01} + 2\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{01} - \Gamma^0_{11}\Gamma^1_{00} - 2\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{02}.$$

$$R_{11} = \frac{\partial \Gamma^0_{11}}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma^0_{01}}{\partial x} - 2\,\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x} +$$

$$+ \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{11} + 2\Gamma^2_{02}\Gamma^0_{11} + \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{11} + 2\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{11} -$$

$$- \Gamma^0_{01}\Gamma^0_{01} - \Gamma^0_{11}\Gamma^1_{01} - 2\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}.$$

$$R_{22} = \frac{\partial \Gamma^0_{22}}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x} +$$

$$+ \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{22} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{22} + \cancel{\Gamma^3_{03}\Gamma^0_{22}} + \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{22} +$$

$$+ \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} + \cancel{\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{22}} - \cancel{\Gamma^0_{22}\Gamma^2_{02}} - \cancel{\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12}}.$$

$R_{22} = R_{33}$

$$R_{33} = \frac{\partial \Gamma^0_{33}}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial x} +$$

$$+ \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{33} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{33} + \cancel{\Gamma^2_{02}\Gamma^0_{33}} + \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{33} +$$

$$+ \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{33} + \cancel{\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{33}} - \cancel{\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{33}} - \cancel{\Gamma^0_{33}\Gamma^3_{03}}.$$

Продолжение одномерного нестационарного случая. (1)

Рассмотрим более простую задачу, а именно: метрический тензор выберем в виде

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Это значит, что мы рассматриваем не одномерный случай в 4-мерном пр.-вр., а одномерный случай в 2-мерном пр.-вр., когда $\exists$ только одна пр-я координата. В результате система ур-й Эйнштейна должна превратиться в одно ур-е.

Обратный тензор $g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$.

Символы Кристоффеля:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot\alpha}{\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 22 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\dot\gamma}{\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha'}{\gamma}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot\gamma}{\gamma}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 22 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma'}{\gamma}$$

Тензор Римана

$$R^1_{212} = \frac{\partial \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \end{pmatrix}}{\partial x^1} - \frac{\partial \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}}{\partial x^2} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$R_{1212} = -\frac{1}{2}\ddot\gamma - \frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\frac{\dot\alpha\dot\gamma}{\alpha} + \frac{1}{4}\frac{\alpha'^2}{\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{4}\frac{\dot\gamma^2}{\gamma} + \frac{1}{4}\frac{\alpha'\gamma'}{\gamma}$$

Тензор Риччи

$$R_{11} = \frac{1}{\gamma} R_{1212} \;;\quad R_{22} = \frac{1}{\alpha} R_{1212} \;;\quad R_{12} = 0$$

$R = \frac{2}{\alpha\gamma} R_{1212}$ - скалярная кривизна.